

## LA LEZIONE

### Momento magnetico e momento angolare

L'immagine dell'atomo di idrogeno, con la carica negativa in orbita chiusa intorno al protone, suggerisce l'effetto di un campo di induzione magnetica  $\mathbf{B}$  sull'elettrone che viaggia alla velocità  $v$ . Classicamente, basta sostituire all'elettrone una spira circolare di area  $A=\pi r^2$ , percorsa da una corrente  $i=-ev/2\pi r$  (per convenzione il simbolo  $e$  è la carica elementare di  $1,6 \cdot 10^{-19}$  C, quindi la carica dell'elettrone è  $-e$ ). Si può definire allora un momento magnetico orbitale  $\boldsymbol{\mu}=i\mathbf{A}$  (con  $\mathbf{A}$  vettore perpendicolare alla spira stessa). L'intensità del momento magnetico diviene:  $\mu=\pi r^2(-ev)/2\pi r=-evr/2$ . Introducendo il momento angolare  $\mathbf{L}=\mathbf{m}\mathbf{v}\times\mathbf{r}$  è facile convincersi che  $\boldsymbol{\mu}=-\mathbf{L}(e/2m)$ .

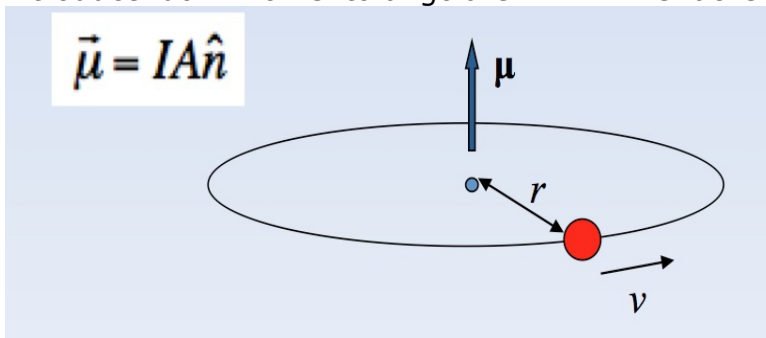


fig.1 Momento magnetico di un elettrone orbitante intorno al nucleo

I due momenti (magnetico e angolare orbitale) sono opposti a parte un fattore che dipende dal semirapporto tra carica elementare e massa dell'elettrone. Questo risultato vale per la fisica classica e anche per la meccanica quantistica. Così il moto orbitale dell'elettrone produce, in presenza di campo magnetico esterno, un momento di una forza  $\mathbf{M}=\boldsymbol{\mu}\times\mathbf{B}$  che determina una precessione intorno all'asse del campo magnetico (la cui frequenza è associata al nome del fisico Joseph Larmor). Dal punto di vista dell'energia, associare all'elettrone un momento magnetico orbitale comporta, sempre in presenza di campo, una variazione di energia  $\Delta E$  pari al prodotto scalare  $-\boldsymbol{\mu}\cdot\mathbf{B}$  (che può essere aggiunta o sottratta a ogni livello energetico). Lo strano miscuglio di fisica classica e regole di quantizzazione che contraddistingueva la prima teoria dei quanti, successiva al modello atomico di Bohr, prevedeva allora oltre a un numero quantico principale, ulteriori numeri quantici per spiegare l'effetto Zeeman. Per ragioni sperimentali, che vedremo in seguito, il momento magnetico orbitale non è l'unico effetto magnetico rilevabile per un elettrone. Il tentativo di associare a questo nuovo fenomeno un'immagine classica, ha portato all'introduzione del termine spin per il momento angolare intrinseco  $\mathbf{S}$ , come se l'elettrone fosse dotato di una rotazione intorno al proprio asse, descritta da un quarto numero quantico  $s$ .

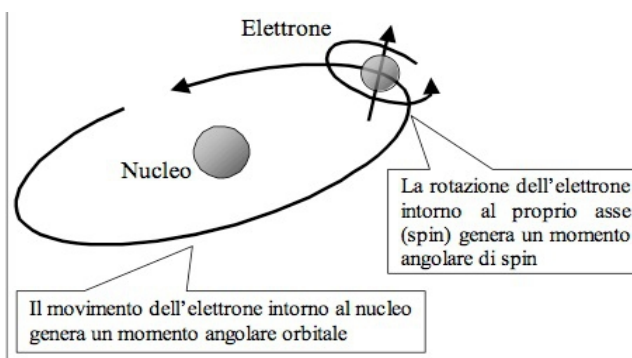


fig.2 Momento angolare orbitale e momento magnetico di spin in una rappresentazione classica

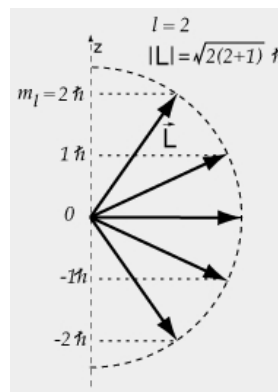
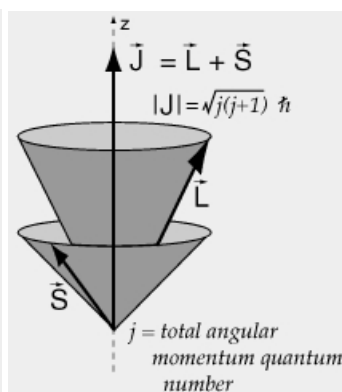
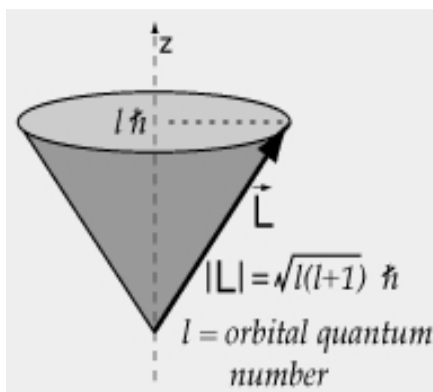
Il rapporto tra il nuovo momento magnetico di spin  $\boldsymbol{\mu}_s$  e lo spin  $\mathbf{S}$  è quasi esattamente il doppio se paragonato con il precedente valore del momento angolare orbitale:  $\boldsymbol{\mu}_s=-\mathbf{S}(e/m)$ . E non vi sono giustificazioni classiche a un simile risultato.

In generale, su questo punto ritorneremo tra breve, per atomi isolati pur complessi, se si misura il momento magnetico totale  $\mu$  e il momento angolare totale  $\mathbf{J}=\mathbf{L}+\mathbf{S}$ , il loro rapporto si può esprimere come un risultato intermedio tra i due precedenti. Si è soliti così scrivere per le intensità  $\mu=gS(-e/2m)$ , dove  $g$  è un fattore adimensionale, un numero puro, dipendente dallo stato dell'atomo, chiamato fattore di Landé (per ricordare l'opera di Alfred Landé che lo utilizzò per interpretare gli spettri degli atomi sottoposti a campi magnetici). Per un elettrone libero il valore di  $g$ , approssimato alla quarta cifra decimale, è 2,0023.

## Lo spin e la costante $h$ (regole di quantizzazione)

Il momento angolare ha la stessa unità di misura della costante di Planck  $h$  (il quanto di azione) e già nelle prime teorie quantistiche per descrivere l'orbita ellittica di un elettrone nell'atomo di idrogeno si utilizzavano due condizioni di quantizzazione: la prima per l'energia, determinata dal numero quantico  $n$ ; l'altra per il momento angolare. Utilizzando una forma moderna:  $L=lh/2\pi$ , con  $l=0, 1, 2, \dots, n-1$ . Il primo a generalizzare le regole quantistiche di Bohr fu Arnold Sommerfeld che tenne conto della variazione relativistica della massa trattando il moto di precessione dell'ellisse per spiegare la struttura fine delle righe spettrali. Il termine  $h/2\pi$  è così comune nella fisica quantistica che si utilizza al suo posto il simbolo  $\hbar$  ( $h$  tagliato): la costante di Planck ridotta. Un sistema quantistico oggi viene descritto attraverso diverse proprietà fisiche tra cui lo spin. Gli elettroni, i protoni e i neutroni, hanno, misurando la componente del momento magnetico intrinseco in una qualsiasi direzione (!), solo due possibili valori di spin:  $\hbar/2$  e  $-\hbar/2$ . Secondo la teoria classica una qualsiasi trottola per un dato momento angolare ed energia ha invece un'infinità di stati possibili. Se il sistema è più complesso dell'elettrone libero, il momento angolare complessivo  $\mathbf{J}$ , misurato in una qualsiasi direzione  $z$ , porta a  $2j+1$  valori (interi o seminteri) tutti equiprobabili:  $j \hbar, (j-1) \hbar, (j-2) \hbar, \dots, -(j-2) \hbar, -(j-1) \hbar, -j \hbar$ . Così per il momento angolare uguale a  $3/2$ , i valori possibili sono quattro:  $3/2, 1/2, -1/2, -3/2$ . La quantizzazione della componente lungo una direzione arbitraria  $z$  non è l'unica delle regole di quantizzazione del momento angolare. Anche il suo modulo risulta quantizzato secondo la relazione:

$|\mathbf{J}| = [j(j+1)]^{1/2} \hbar$ . I libri di liceo propongono questa equazione rapidamente, spesso nella forma:  $|\mathbf{L}| = [l(l+1)]^{1/2} \hbar$ . È possibile però darne una giustificazione a partire dall'esempio precedente. Le componenti ( $J_x, J_y, J_z$ ) del momento angolare hanno come possibili valori  $3/2, 1/2, -1/2, -3/2$ . Il termine della costante di Planck ridotta viene omessa nei calcoli che seguono. Così il modulo di  $\mathbf{J} = (\langle j_x^2 \rangle + \langle j_y^2 \rangle + \langle j_z^2 \rangle)^{1/2} = (3\langle j_z^2 \rangle)^{1/2} = \{ [(3/2)^2 + (1/2)^2 + (-1/2)^2 + (-3/2)^2] / 4 \}^{1/2} = (15/4)^{1/2}$ , uguale al valore  $|\mathbf{J}| = [3/2(3/2+1)]^{1/2}$ .



**fig.3** Il momento angolare orbitale lungo l'asse  $z$  è caratterizzato da un valore multiplo della costante  $h$  ridotta:  $\hbar$ .; **fig.4** Il momento angolare totale come somma del momento angolare orbitale e di quello di spin;

**fig.5** La rappresentazione dei 5 valori possibili della componente  $z$  del momento angolare orbitale avente  $l=2$

Per generalizzare il risultato bisognerebbe utilizzare l'identità:  $1^2+2^2+\dots+j^2=j(j+1)$   $(2j+1)/6$  che si dimostra con il principio di induzione completa. Dunque il modulo del momento angolare supera il valore più grande della componente  $J_z=j \hbar$  poiché  $|\mathbf{J}|=[j(j+1)]^{1/2} \hbar$ . Per questo si afferma nelle trattazioni della teoria dei quanti che il momento angolare non è mai completamente nella direzione z. Per non complicare ulteriormente la trattazione si è per ora taciuto che i valori possibili del numero quantico j lungo l'asse z corrispondono ai valori del numero quantico magnetico m.

### L'esperienza di Stern e Gerlach

Dalla fine dell'Ottocento, grazie agli studi di Pieter Zeeman sui vapori di sodio, si conoscevano gli effetti di un debole campo magnetico sulle righe spettrali. Ogni riga si divideva in tre righe o un numero maggiore. I tripletti furono spiegati nell'ambito della teoria atomica introducendo un terzo numero quantico m, tale che la componente del momento angolare orientata secondo il campo magnetico fosse uguale a  $L_z=m \hbar$ , con m intero tra -l e l.

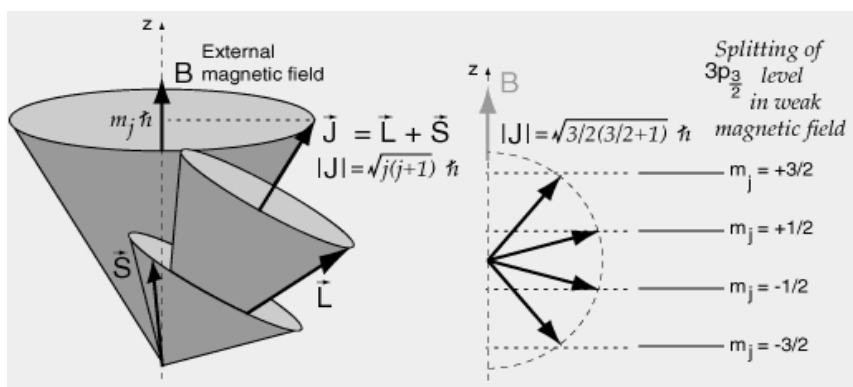


fig.6 Effetto di un debole campo magnetico esterno sui vettori L e S. Il momento angolare totale è quantizzato secondo l'espressione:  $J=[3/2 (3/2+1)]^{1/2} \hbar$  : a destra, i quattro valori possibili del numero quantico magnetico m,  $J_z=m \hbar$ .

I multipletti, dovuti a un effetto Zeeman anomalo, non potevano essere ricondotti al solo m ed erano affrontati introducendo il fattore di Landé. Senza entrare nella storia alquanto complessa dei quattro numeri quantici, conviene passare a discutere un'altra esperienza, ancora oggi associata ai nomi di Stern e Gerlach. L'esperienza del 1921-22 è giustamente famoso perché può essere considerato il precursore di una serie di tecniche ancora oggi in uso come la spettroscopia di risonanza magnetica elettronica (detta, electron spin resonance ESR, o electron paramagnetic resonance EPR), in cui un sistema fisico complesso dal punto di vista magnetico può essere ricondotto alle proprietà magnetiche del solo elettrone libero. Riscaldando in un forno atomi di argento si produceva un fascio di atomi costretti ad attraversare un campo magnetico non omogeneo (figura 7) fino a raggiungere un rivelatore (lastra fotografica).

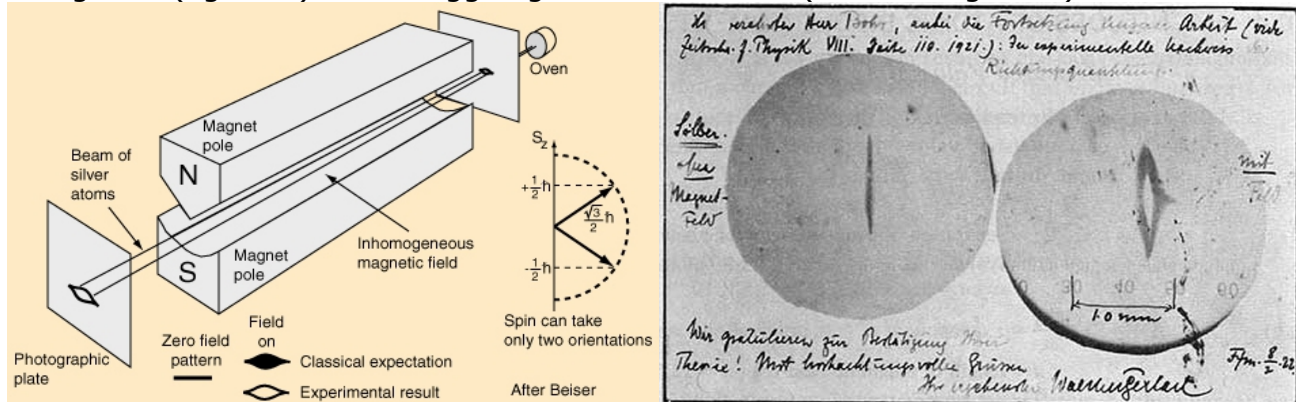
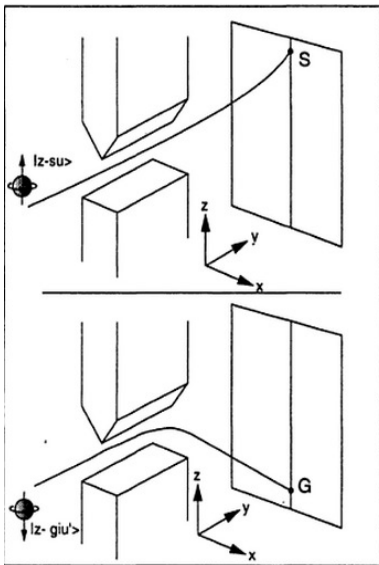


fig.7 Rappresentazione dell'esperienza di Stern e Gerlach, con l'interpretazione odierna dell'esperienza tramite il concetto di spin; fig.8 La comunicazione di Gerlach a Bohr con la fotografia interpretata come prova della quantizzazione direzionale

La distribuzione delle posizioni raggiunte dalle particelle invece di ricoprire completamente una superficie, disegnavano due curve ben distinte rispetto al valore centrale (figura 8).



Se si va ad analizzare la configurazione elettronica dell'argento si trova con i dati odierni che con il numero quantico azimutale  $l=0$  vi è un elettrone spaiato nell'orbitale più esterno. In questo esperimento le proprietà magnetiche dell'atomo di argento sono ricondotte (questo si è capito solo dopo l'introduzione del concetto di spin, diversi anni dopo le pubblicazioni di Stern e Gerlach) semplicemente al singolo elettrone spaiato. Il suo spin in su o giù determina il momento magnetico intrinseco che in un gradiente magnetico causa la deviazione nello stesso verso della freccia della rotazione ipotetica del momento (verso l'alto per lo spin su, verso il basso per lo spin giù). Furono George E. Uhlenbeck e Samuel A. Goudsmit a introdurre nel 1925 lo spin elettronico e a rivoluzionare la storia dei numeri quantici.

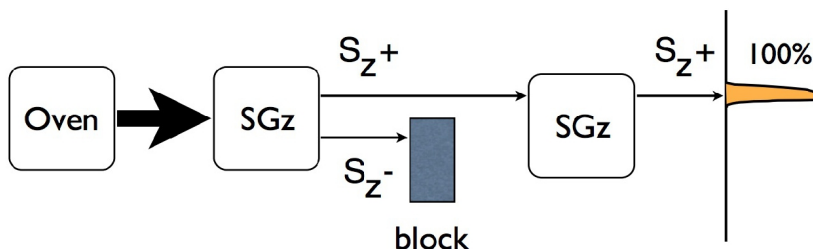
*fig.9 Il magnete provoca nelle particelle con spin su una deviazione verso l'alto, deviazione opposta per le particelle con spin giù nella direzione z*

### L'odierna meccanica quantistica: esperimenti di Stern e Gerlach in sequenza

L'apparato di Stern e Gerlach (SG), idealizzato, si presta, con l'aggiunta di opportuni filtri, a una trattazione introduttiva alla fisica quantistica (al proposito si può vedere in ambito universitario il libro di Sakurai e per le scuole superiori il lavoro di Cirulli, [Un percorso di meccanica quantistica basato sugli stati di spin](#), 2007, in Fisica moderna per la scuola.

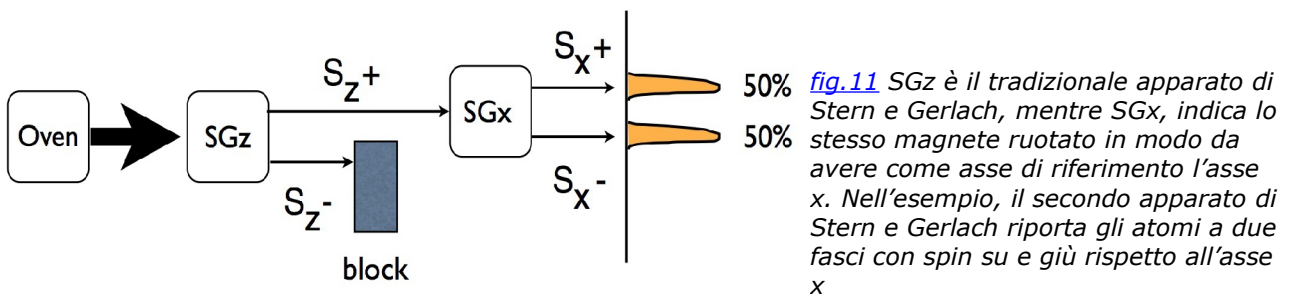
Lo spin, il nuovo grado di libertà interno attribuibile a ogni sistema quantistico, ha nel caso di particelle come gli elettroni, i protoni e i neutroni solo due stati: su e giù ( $S_z = \pm \hbar/2$ ). Per molti versi lo spin è l'analogo degli stati di polarizzazione per il fotone, ma non ha, come già detto, un analogo classico.

Immaginiamo di preparare due magneti di Stern e Gerlach, orientati secondo la direzione z ( $SG_z$ ), in sequenza e di un filtro capace di bloccare una delle componenti di  $S_z$  come in figura 10.

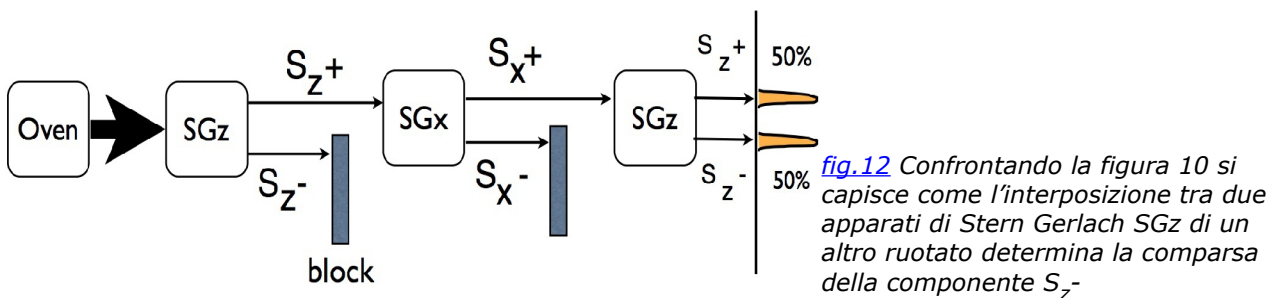


*fig.10 Il fascio di atomi emesso dal forno viene selezionato da un apparato di Stern e Gerlach ideale e da un filtro che blocca la componente  $S_z^-$ . Un secondo apparato di Stern e Gerlach non modifica il fascio di atomi con spin rivolti verso l'alto*

La presenza del secondo apparato non modifica in modo sostanziale il fascio di atomi con spin in su,  $S_z^+$ , che raggiunge il dispositivo di rilevazione. Tutti gli atomi sono deviati verso l'alto. Fin qui niente di strano. Ma se si ruota il secondo apparato di  $90^\circ$  nella direzione x ( $SG_x$ ), cambiando la direzione del gradiente del campo magnetico, il risultato è la suddivisione degli atomi in due gruppi aventi componenti  $S_x^+$  e  $S_x^-$  (figura 11).



Come se lo stato  $z^+$  fosse esprimibile attraverso una combinazione di stati  $x^+$  e  $x^-$ . Ogni atomo ha la stessa probabilità di finire nei due gruppi. Infine inserendo un terzo apparato di Stern e Gerlach (figura 12) è possibile far ricomparire gli atomi caratterizzati da  $S_z^-$ , bloccati dal primo filtro.



Come se lo stato  $x^+$  possa essere descritto da una combinazione di stati  $z^+$  e  $z^-$ . Le misure dello spin in questi esempi mostrano che due diverse componenti (x e z) non potranno essere determinate insieme (con una precisione piccola a piacere). Esse non sono mai compatibili (principio di indeterminazione). Ruotando il filtro di Stern e Gerlach si può sempre esprimere uno stato del fascio come combinazione lineare di due stati di spin su e giù rispetto a un'altra direzione (principio di sovrapposizione), cancellando le precedenti informazioni sulla selezione del fascio. Quando il singolo elettrone (atomo) (figura 13) attraversa l'apparato SGz con un momento orientato secondo l'asse x positivo, esso ha la stessa probabilità di finire nel punto G o in S (S e G sono in realtà due curve). Se si realizza un certo numero di prove, il 50% delle particelle finisce verso il basso e il 50% verso l'alto. Il paradosso del gatto di Schrödinger nasce dalla aleatorietà intrinseca del sistema quantistico. Alla domanda se il singolo elettrone dell'ultimo esempio arriva nel punto G o in S, non vi è una risposta definita. L'introduzione delle idee della fisica quantistica alla Dirac avviene così attraverso il principio di sovrapposizione lineare di un sistema con due stati di spin.

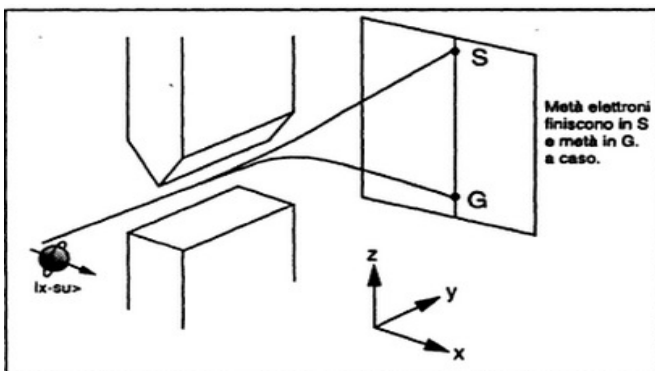


fig.13 Un atomo caratterizzato dallo stato  $x$  su ha la stessa probabilità, attraversando un apparato di Stern e Gerlach con asse rivolto secondo la direzione z, di finire nel punto G o nel punto S. I punti G e S nell'esperienza originale sono in realtà due curve