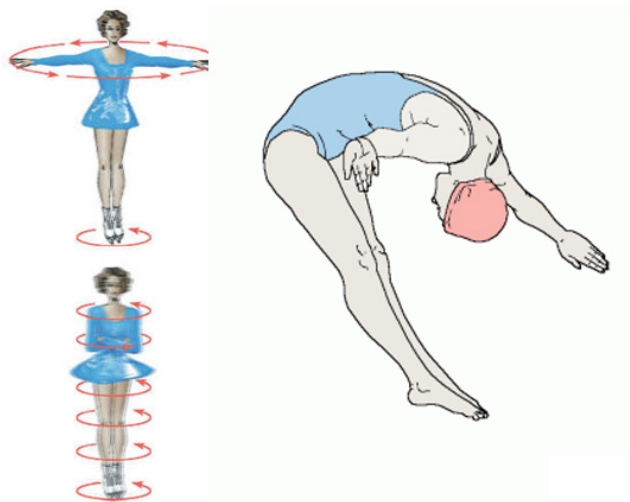


LA LEZIONE

MOMENTO ANGOLARE

Esperienze elementari



[Fig. 1](#)

Tutti abbiamo osservato le **evoluzioni di una pattinatrice** sul ghiaccio o i **tuffi da una piattaforma** dei campioni olimpionici. Ed è abbastanza facile rendersi conto che le **velocità di rotazione** diminuiscono quando gli atleti allontanano braccia e gambe dal corpo e aumentano, invece, quando li avvicinano.

Eppure, pattinatori e tuffatori palesemente non si 'spingono' in alcun modo: i pattinatori ruotano sul ghiaccio, quindi in condizioni di quasi assenza di attrito, e i tuffatori sono addirittura sospesi in aria quando muovono braccia e gambe.

Le **forze esterne agenti** sono la **forza di gravità** e la **reazione della superficie** ghiacciata (solo per i pattinatori) e agiscono nello stesso modo per tutta la durata dei movimenti (piroette sul ghiaccio e tuffi). Non può essere, quindi, una forza la causa di ciò che osserviamo.

Un altro semplice e divertente esperimento è farsi dare una bella spinta mentre si sta seduti su una piattaforma girevole a basso attrito. Meglio ancora se si tengono in mano dei bilancieri o dei pesi.

Si nota facilmente che la velocità di rotazione diminuisce se si distendono le braccia, mentre aumenta se le si avvicina al corpo.

Ma le domande non sono ancora finite...

Perché è più facile mantenere l'equilibrio andando in bicicletta ad alta velocità piuttosto che a bassa velocità? (per i più esigenti: provate manualmente a ruotare il piano di rotazione di una singola ruota di bicicletta mentre gira velocemente intorno a un asse).

Ma anche: perché una trottola non cade mentre ruota e come è possibile far compiere a certi giocattoli simili alle trottole (i giroscopi) evoluzioni che sembrano apparentemente violare le leggi della meccanica?

La costruzione di nuovi concetti per descrivere i fatti sperimentali

A questo punto gli studenti devono essere guidati alla *costruzione* dei nuovi concetti

fondamentali per la spiegazione, ovvero il concetto di **momento angolare** e di **momento di inerzia**.

Il lavoro di ricerca inizia con una attenta riflessione su quali sono le grandezze importanti che variano durante i fenomeni osservati.

Si può *costruire* inizialmente il concetto di momento angolare di un *corpo puntiforme* che ruota su una traiettoria circolare dopo aver osservato che le grandezze decisive sono la massa m del corpo, la sua velocità tangenziale di rotazione \vec{v} (quindi la sua quantità di moto $m\vec{v}$) e la sua distanza dall'asse di rotazione \vec{r} . Definiamo allora **momento angolare** di un corpo di massa m la grandezza vettoriale:

$$\vec{L} = m \vec{v} \times \vec{r}.$$

Questa *definizione* del vettore \vec{L} (direzione perpendicolare al piano che contiene i vettori $m\vec{v}$ e \vec{r} , e verso definito dalla nota regola della mano destra utilizzata nel prodotto vettoriale di due vettori) tiene conto di tutte le grandezze sperimentalmente rilevanti.

Il concetto di **momento di inerzia** nasce dall'esigenza di descrivere ciò che cambia in un *corpo rigido* in rotazione intorno a un asse, quando diverse parti di questo corpo variano le loro distanze dall'asse di rotazione (che è esattamente ciò che succede a pattinatori e tuffatori), ciò che differenzia, quindi, da un punto di vista rotatorio, corpi di uguale massa. Semplici esperimenti qualitativi di laboratorio possono illustrare facilmente la diversa spinta necessaria a mettere in rotazione corpi di differenti momenti di inerzia ma uguale massa, come dischi, cilindri, sfere e gusci sferici, e quindi la differente **inerzia rotatoria** di questi corpi.

Il momento di inerzia I , rappresenta la resistenza che oppone un corpo quando si tenta di variare il suo momento angolare, così come la massa di un corpo (l'inerzia) rappresenta la resistenza del corpo quando si tenta di variare la sua velocità.

La legge fondamentale della dinamica rotatoria

Il passaggio teorico successivo è l'introduzione della legge fondamentale della dinamica rotatoria:

$$\vec{M} = \frac{\Delta \vec{L}}{\Delta t} \quad (1)$$

dove \vec{M} rappresenta il momento risultante delle forze agenti sul corpo e $\Delta \vec{L}$ la corrispondente variazione del momento angolare del corpo nell'intervallo di tempo Δt . La dimostrazione rigorosa della legge è piuttosto complessa ma, come vedremo, è possibile introdurla e, in qualche modo giustificarla, costruendo un'*analogia* tra moto traslatorio e moto rotatorio.

La condizione necessaria per la conservazione del momento angolare, che segue dalla legge (1), è: $\vec{M} = 0$, che implica $\Delta \vec{L} = 0$ e quindi $\vec{L} = \text{costante}$.

La spiegazione dei primi esperimenti

Arriviamo finalmente ad una spiegazione sintetica dei primi fenomeni osservati sulla base del principio enunciato:

pattinatori, pattinatrici, tuffatori e tuffatrici, mantengono il loro momento angolare perché il momento risultante delle forze applicate relativamente al loro centro di massa è uguale a zero, o perché la risultante delle forze applicate è nulla (pattinatori) o perché la forza peso (l'unica forza che agisce sempre su tutti i corpi) passa per il centro di rotazione dei tuffatori coincidente con il centro di massa.

Poiché il momento angolare L può essere scritto in funzione del momento di inerzia I e della velocità angolare ω : $L = I\omega$, si spiega perché, se L è costante, al crescere del momento di inerzia, diminuisce la velocità angolare di rotazione e viceversa.

Approfondimenti

Analogie tra moto di traslazione e moto di rotazione

Alcuni approfondimenti sono altamente raccomandati.

Un primo importante approfondimento riguarda il carattere vettoriale del momento angolare e della velocità angolare $\vec{\omega}$:

$$\vec{L} = I \vec{\omega} \quad (2)$$

Se \vec{L} rappresenta il momento angolare vettoriale, $\vec{\omega}$ la corrispondente velocità angolare, deve essere anch'essa una grandezza vettoriale (I è il momento di inerzia del corpo).

La scrittura vettoriale delle relazioni (1) e (2) permette di stabilire una completa **corrispondenza tra grandezze del moto di traslazione e grandezze del moto di rotazione**, in particolare tra:

- spostamento lineare e spostamento angolare,
- velocità rettilinea e velocità angolare,
- accelerazione lineare e accelerazione angolare,
- massa e momento di inerzia,
- forza risultante e momento risultante delle forze,
- quantità di moto e momento angolare

In generale, quindi, tra *dinamica traslazionale* e *dinamica rotazionale*, e infine tra *conservazione della quantità di moto* e *conservazione del momento angolare*.

Il ragionamento analogico è fondamentale per comprendere meglio la portata e il significato dei nuovi concetti proprio nel confronto con concetti e situazioni 'simili', già incontrati in precedenza.

Analogie e differenze costituiscono un vero e proprio strumento conoscitivo in grado di strutturare le conoscenze degli studenti in reti stabili.

Applicazioni tecnologiche del giroscopio

Il giroscopio è un dispositivo meccanico il cui funzionamento si basa sulla legge di conservazione del momento angolare e che trova larga applicazione in numerosi ambiti tecnologici.

È costituito da un disco, omogeneo e massiccio, collegato per mezzo di supporti meccanici a una sbarra cilindrica passante per il suo centro. Gli estremi di questa sbarra sono imperniati in un supporto fisso in modo da consentire ogni orientamento dell'asse e ogni moto del disco intorno al suo baricentro (anch'esso fisso): se al disco viene impressa una rapidissima rotazione intorno al suo asse (*velocità giroscopica*) e questo viene puntato verso un riferimento inerziale (per es. una stella fissa), quel puntamento permane invariato finché dura la rotazione (**principio della permanenza degli assi giroscopici**); inoltre, se si applica in un punto dell'asse una forza sufficiente a causarne una deviazione, questa non si manifesta (come ci si potrebbe aspettare) nel piano che contiene l'asse e la forza, ma, con un moto detto di precessione, nella direzione del momento, perpendicolare a tale piano (**principio della tendenza al parallelismo dell'asse giroscopico con il momento delle forze sollecitanti**).

Bicicletta e motociclette

Possiamo spiegare a questo punto la maggiore stabilità della bicicletta quando ci si muove a velocità elevata. Le ruote della bicicletta ruotano in un piano verticale, il

momento della forza di gravità è nullo perché attraversa il baricentro del corpo e, di conseguenza, il momento angolare vettoriale della bicicletta rimane costante e mantiene in equilibrio la bicicletta, opponendosi alla variazione del piano di rotazione della ruota. Se l'attrito non riducesse la velocità della bicicletta, una volta raggiunta una velocità sufficiente, si potrebbe proseguire all'infinito (si noti la somiglianza tra questo ragionamento e l'esperimento ideale galileiano alla base del principio di inerzia).

Per variare il piano di rotazione delle ruote della bicicletta (e, quindi, il suo momento angolare) sarebbe necessario applicare alla bicicletta una forza esterna piuttosto significativa, in grado di esercitare un forte momento, ad esempio una spinta dall'esterno perpendicolare al piano delle ruote.

Se la bicicletta si muove a bassa velocità, il suo momento angolare è minore ed è più facile quindi perdere l'equilibrio, ovvero, in linguaggio fisico, è sufficiente una piccola forza (il risultato di un urto, una buca ecc.) per variare il piano di rotazione delle ruote.

Quindi riassumendo, equilibrio dinamico di una bicicletta o di una motocicletta si deve al principio della permanenza degli assi giroscopici delle due ruote: le mani al cielo dello sprinter vittorioso che taglia il traguardo sono la manifestazione evidente che il manubrio gode di una relativa stabilità.

Meno intuitiva, ma sempre connessa con gli effetti giroscopici del mezzo, è la controsterzata che i motociclisti utilizzano nell'attacco di una curva e che provoca la cosiddetta "piega" del veicolo verso l'interno stesso della curva. Si spiega in termini di **moto di precessione**: infatti il momento angolare della ruota anteriore viene forzato dal momento torcente esercitato dal pilota sulla ruota; in conseguenza di ciò si verifica una rotazione della motocicletta attorno all'asse di rotazione parallelo alla sua direzione di marcia che la fa inclinare verso l'interno della curva.



Fig.2 [Link al video](#)

Giroscopio direzionale negli aerei

Strumento impiegato nella navigazione aerea per il controllo della direzione di volo nel quale un giroscopio sospeso per mezzo di giunti cardanici, e il cui asse di rotazione è mantenuto orizzontale per mezzo di dispositivi elettrici o meccanici, è collegato a una scala di lettura: grazie all'invariabilità dell'orientamento dell'asse giroscopico, lo strumento è in grado di fornire indicazioni sulle variazioni di direzione dell'aeromobile, sostituendo nelle fasi di virata la bussola magnetica, rispetto alla quale reagisce con maggior prontezza e risente meno degli effetti delle accelerazioni.

Lo stabilizzatore giroscopico delle navi

Per attenuare l'oscillazione delle navi attorno all'asse longitudinale poppa-prua (rollio) vengono montati nella chiglia degli stabilizzatori giroscopici formati da un volani rotanti ad alta velocità attorno al proprio asse. Quando il rollio fa inclinare la nave, si forma una coppia giroscopica stabilizzatrice sul piano a 90° che tende a smorzarlo: l'oscillazione della nave che si determina attorno a questo asse trasversale (chiamata di beccheggio) presenta infatti un momento di inerzia relativo a questo asse longitudinale assai maggiore rispetto a quello presente nel rollio e dunque avviene con una velocità angolare minore.

Stabilizzazione traiettoria dei proiettili e puntamento telescopi

Per conferire una stabilità alla traiettoria dei proiettili espulsi dalle canne delle armi da fuoco, si praticano delle rigature interne elicoidali sulle canne stesse al fine di imprimere un moto di rotazione giroscopica.

Sistemi giroscopici vengono normalmente utilizzati dalle navi per stabilizzare il puntamento di antenne verso satelliti per le telecomunicazioni o quello dei sistemi d'arma verso gli obiettivi in modo tale da ovviare alle perturbazioni indotte dal moto ondoso. Analogamente i sistemi di guida inerziale prevedono che dei sistemi giroscopici orientino il veicolo puntando costantemente rispetto alle stelle fisse.

Applicazioni in campo astronomico e astrofisico

La seconda legge di Keplero

Una prima applicazione astronomica classica riguarda il moto di rivoluzione dei pianeti intorno al Sole e la seconda legge di Keplero: in tempi uguali il raggio vettore che unisce il pianeta al Sole percorre aree uguali. Si può dimostrare che è una conseguenza del principio di conservazione del momento angolare: la forza centrale del Sole ha, infatti, momento nullo relativamente al centro dell'orbita che passa per il centro di massa del pianeta.

La rotazione terrestre

Una seconda applicazione riguarda la rotazione della Terra intorno al proprio asse¹. La rotazione continua da miliardi di anni² per la conservazione del momento angolare della Terra, perché la forza gravitazionale del Sole, ha momento nullo anche relativamente all'asse di rotazione terrestre.

La Terra come una pattinatrice durante la figura della trottola può variare la velocità di rotazione

solo cambiando il momento di inerzia, in conseguenza di dislocazioni di masse significative. Un terremoto intenso, uno tsunami possono alterare la durata del giorno. Gli ultimi eventi catastrofici hanno accorciato il giorno di pochi microsecondi come se la massa si fosse concentrata più vicina al suo asse provocando un leggerissimo aumento di velocità. Ovviamente vi sono altri fenomeni che riguardano l'atmosfera (venti) e l'idrosfera (correnti oceaniche) che producono variazioni molto più intense³.

¹ La trattazione puntuale dell'argomento viene effettuata nel corso di Scienze con la Terra che diviene una sofisticata trottola. Qui non vogliamo trattare la precessione degli equinozi o la nutazione.

² Questa regolarità dei moti di rivoluzione e di rotazione ha permesso un certo tipo di evoluzione dei sistemi viventi sulla Terra: ci si può domandare quale tipo di evoluzione si sarebbe avuta se i periodi di rivoluzione e di rotazione da un lato, se l'eclittica e l'inclinazione dell'asse di rotazione dall'altro, fossero variabili nel tempo e non costanti a causa della conservazione dei momenti angolari (orbitale e intrinseco) della Terra.

³ La fusione delle calotte polari e lo spostamento quindi di ingenti masse d'acqua dai poli all'intera superficie oceanica, può essere trattata in un esercizio.

La forma delle galassie

Una terza conseguenza riguarda la forma delle galassie. I due parametri, che giocano il ruolo principale nel controllare l'evoluzione di una galassia, sono la massa e il momento angolare della nube di gas, dalla quale essa trae origine. Passando dalle galassie ellittiche alle spirali, diminuisce la massa mentre aumenta il momento angolare iniziale. In nubi di grande massa e momento angolare relativamente piccolo, la formazione delle stelle e il conseguente esaurimento del gas diffuso procedono più rapidamente del collasso gravitazionale globale: il sistema, allora, evolve verso una galassia ellittica, che sarà tanto meno schiacciata quanto più rapido è stato l'esaurimento del gas. In nubi di massa minore e velocità rotazionali più elevate, il collasso globale, in direzione polare, procede, invece, più rapidamente del processo di formazione delle singole stelle, sicché la galassia assume la forma di un disco appiattito (galassia a spirale).

Le stelle di neutroni

Una quarta conseguenza si ha nelle stelle di neutroni, ovvero negli antichi resti delle supernove, che ruotano in modo molto rapido dopo il collasso gravitazionale che ha ridotto il loro raggio, proprio a causa della legge di conservazione del momento angolare: talune di queste stelle di neutroni emettono radiazione in modo pulsante allo stesso modo con cui apparirebbe la luce emessa da un faro che gira, da cui il loro nome di pulsar.

Il sistema solare

Concludiamo questa rapida rassegna evidenziando un tema in cui il momento angolare rappresenta più un problema che un aiuto predittivo: il sistema solare. Il centro di massa del nostro sistema solare coincide quasi esattamente col Sole, eppure il momento angolare della nostra stella rappresenta una percentuale piccolissima di quello totale. Questo perché la velocità di rotazione del Sole è estremamente lenta rispetto a quella dei pianeti. Tutte le teorie della formazione del sistema solare prevedono una velocità elevata della stella, quindi introducono un meccanismo per spiegare la riduzione di velocità⁴.

⁴ Si veda ad esempio Il [Sistema Solare](#) nelle voci enciclopediche del sito Treccani.